Øving 1

Oppgave 1

1. Vi ser at snittet er alle oddetall med 3 som divisor. Dermed kan vi skrive denne mengden som .
2. Mengden er alle naturlige tall over 0, og mengden B er alle oddetall over 0. Dermed vil differansen mellom A og B være alle partall over 0, altså  
   .
3. Differansen mellom B og C vil være alle oddetall over 0 som ikke har 3 som divisor. Dette kan vi skrive som .
4. Mengden inneholder alle naturlige tall over 0, og mengden inneholder de fire første tallene over eller lik 0 med 4 som divisor, altså 0, 4, 8, 12. En union mellom og vil derfor bare gi oss alle naturlige tall, siden alle tall bortsett fra 0 allerede finnes i . Mengden B inneholder alle positive oddetall, og siden alle oddetall også er naturlige tall, vet vi at B må være en delmengde av . Matematisk kan vi skrive:
5. Komplimentmengden til ,  , med som univers, vil være alle naturlige tall, bortsett fra 0, 4, 8, eller 12. Siden 0 er ekskludert fra dette komplementet, og kun inneholder positive hele tall ellers, vet vi at det må være en delmengde av , som inneholder alle naturlige tall over 0. Matematisk skriver vi:
6. Mengden inneholder bare alle positive oddetall, og inneholder alle tall med 3 som divisor, som er høyere eller lik 0. Mengden inneholder alle naturlige tall over 0, inkludert positive partall. har noen partall, nemlig dem som har 3 som divisor, som 6 eller 12 — men alle andre partall blir ekskludert, og dermed er usant.

Oppgave 2

1. Mengden vil i seg selv være en delmengde av , siden den førstnevnte kun inneholder elementer som er i både og . Mengden vil inneholde alle mulige delmengder av , siden det ikke er noen elementer i som ikke er i . Dette betyr også at potensmengden til er en delmengde av potensmengden til .
2. Potensmengden til vil inneholde alle delmengder av . Den tomme mengden har kun en delmengde, altså seg selv. Vi ser derfor at , altså at påstanden er usann.
3. er en delmengde av , siden den førstnevnte mengden kun inneholder elementer som er i både og . Derfor er det også et element av potensmengden til , som inneholder alle delmengdene til . Altså:
4. En union mellom potensmengdene til og , , vil ikke nødvendigvis inneholde enkelte mengder som finnes i potensmengden til unionen mellom og , . er også en delmengde av seg selv, som betyr at . Det er ingen garanti for at finnes i en av potensmengdene til eller . Derfor er påstanden usann.
5. Potensmengden inneholder delmengder med elementer fra A. Disse elementene finnes ikke nødvendigvis i delmengdene i unionen . I den sistnevnte mengden er ikke inkludert på noen som helst måte, og vi kan derfor ikke si at alle delmengdene i finnes i . Utsagnet er derfor ikke sant.

Oppgave 3

Gitt mengden og relasjonen ser vi at:

1. ikke er refleksiv.
2. ikke er symmetrisk.
3. er transitiv.
4. er antisymmetrisk.
5. er irrefleksiv.

Oppgave 4

Vi har at mengden er gitt ved .

1. Relasjonen er den samme som . Vi ser at denne mengden er
   1. Refleksiv
   2. Symmetrisk
   3. Transitiv
2. Relasjonen kan bli gitt ved , altså mengden der minst et tall i paret er et partall. Vi ser at denne mengden er:
   1. Symmetrisk

Oppgave 5

1. For funksjonen gitt ved er injektiv fordi den er lineær. Den stiger alltid med samme verdi, som betyr at det ikke er noen måte for den å «falle tilbake» til en gammel verdi den har vært ved før. Men funksjonen er ikke surjektiv; det laveste tallet vi kan få ut fra den er 2, ved at . Det er ingen måte å få 0 eller 1 ved hjelp av denne funksjonen.
2. Funksjonen gitt ved er ikke injektiv, fordi verdier som og gir samme tall i funksjonen. Den er surjektiv derimot, ved at alle naturlige tall er gjort rede for i utskriften til funksjonen. For hvert naturlig tall finnes det et partall og et oddetall som gir det naturlige tallet som utskrift. Hvis vi skal ha 3 for eksempel, kan vi sette inn 6 eller 7.

Oppgave 6

1. Vi vet at er tellbar, som betyr at det finnes en injektiv funksjon . Med dette kan vi liste opp alle elementene i som der er gitt ved . Vi kan være sikre på at en ny mengde er tellbar ved å bruke den injektive funksjonen , definert slik:
2. For å vise at er tellbar når og er tellbare, kan vi tenke oss en injektiv funksjon som gir tilbake et partall om det man setter inn er element i , og et oddetall om det kun er element i . Vi antar at funksjonene og er definert. Da kan vi definere funksjonen , og bruke den til å vise at mengden er tellbar:

Her kan man merke seg at dette vil også fungere om de injektive funksjonene og ikke skriver ut de naturlige tallene i rekkefølgen — da ender man bare opp med større hopp mellom hvert tall man får fra funksjonen . Dette vet vi fordi alle funksjonene skriver kun ut naturlige tall.